

Aufsatz über eine ungewöhnliche Art, den goldenen Schnitt zu konstruieren

## Der wiedergefundene Schatz

Nachdem die eigentliche Blüte der griechischen Mathematik sich zu Ende neigte, fasste Euklid von Alexandria<sup>1</sup> einen ansehnlichen Teil der bisherigen Kenntnisse am Ende des 4. Jahrh. v. Chr. zusammen. Die "Elemente" Euklid's sind bis heute einer der grössten Welterfolge der Literatur, ein absoluter Bestseller geblieben. Kein Geometrieunterricht dieser Welt kommt um Euklid herum und noch heute bezeichnen die Engländer die Schulgeometrie als "Euclid". Durch seine didaktischen Fähigkeiten und seine Darstellungsart der Mathematik in Definition, Satz und Beweis, war er einer derjenigen Griechen, welche die Naturwissenschaften aus ihrem Tempelschlaf erweckten und ausserdem wurde er zum Vorbild aller Schulmeister schlechthin.

Nach dem Katalog des Proklos war Euklid ein Zeitgenosse des Königs Ptolemaios I (305 - 285 v. Chr.), was darauf hinweist, dass er um 300 v. Chr. in Alexandria gewirkt haben muss. Nähere Lebensdaten sind ausser einigen witzigen Anekdoten nicht bekannt. So erzählt man, dass er auf die Frage seines Königs nach einem einfacheren Weg zur Geometrie geantwortet habe: "Nein, für die Geometrie gibt es keinen königlichen Weg". Oder einem Schüler, welcher fragte, wie er denn mit diesen Dingen, die er da lerne, sein Leben verdienen könne, gab er drei Obolen mit der Bemerkung: "Dieser arme Mann muss Geld verdienen mit dem, was er lernt".

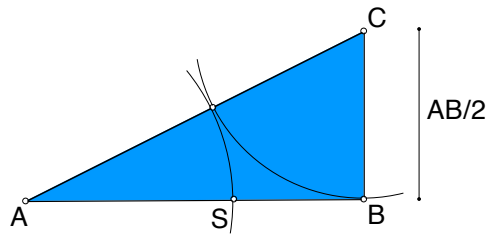
Euklid lebte wahrscheinlich zunächst in Athen und war Platoniker. Bei der Gründung des Museions in Alexandria wurde er dorthin berufen und gründete dort die einzigartige platonische Akademie. In dieser Zeit entstanden auch die Elemente, in deren 13 Büchern Euklid das gesamte damalige mathematische Wissen in genialer Form zusammenfasste. Theon von Alexandria besorgte eine griechische Ausgabe der Elemente, welche bis ins 19. Jahrhundert massgebend war. Arabische Gelehrte übersetzten die Elemente ins Arabische (um 800 n. Chr.) und schliesslich war es Adelhardt von Bath, welcher Euklids Lebenswerk aus dem Arabischen ins Lateinische übersetzte (um 1120 n. Chr.) und somit das altertümliche Wissen dem entstehenden Europa in dessen Gelehrtensprache zur Verfügung stellte.

Im XIII. Buch seiner Elemente stellt Euklid in Lektion 1 fest: "Teilt man eine Strecke stetig (im Goldenen Schnitt), so ist das Quadrat der Summe ihres Maiors und der Hälfte der Strecke fünfmal so gross, wie das Quadrat der Hälfte". Allgemein wird der grössere Abschnitt einer im goldenen Schnitt geteilten Strecke als Maior, der kleinere als Minor bezeichnet. Diese Lektion ist, wie das meiste bei Euklid etwas verwirrend. Aber es wird sofort verständlich, wenn man das Problem geometrisch angeht. In Figur 1 kann man erkennen, dass Euklid's Lektion genau auf die heute noch übliche Teilung einer Strecke  $AB$  im Goldenen Schnitt herauskommt.

---

<sup>1</sup> Euklid, grch. Mathematiker, ca 340-270 v. Chr, Zur Gründung des Museions in Alexandria dorthin berufen. Er begründete dort die mathematische Schule.

Figur 1



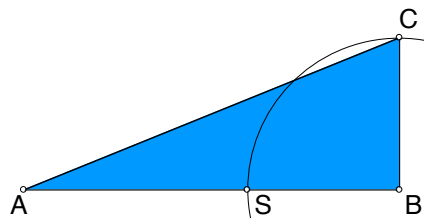
Setzt man für  $AB = 2$ , so ist  $AC = \sqrt{5}$  und  $BC = 1$ . Das zum Rechteck ergänzte rechtwinklige Dreieck ABC ist ein halbes Quadrat oder aber ein aus zwei gleichen Quadraten zusammengesetztes Rechteck. Es wird deshalb vielfach als Doppelquadrat bezeichnet. Somit ist in jedem Doppelquadrat das Quadrat über der Diagonalen fünfmal so gross, wie das Quadrat über der kleineren Seite.

Die auf Lektion 1 folgenden 2 und 3 operieren im Prinzip mit der gleichen Basis, in welcher die 5, resp. die  $\sqrt{5}$  die tragende Rolle spielt. Die  $\sqrt{5}$  ist es ja auch, welche in der Ode an den goldenen Schnitt von Fra Luca Pacioli [PFL] als die eigentliche Wegbereiterin des Goldenen Schnitts dargestellt wird. In kaum einem neueren Mathematiklehrbuch wird über diese Proportion mehr gezeigt, als die Formel  $\left(\frac{\sqrt{5} \pm 1}{2}\right)$  oder allenfalls noch das reguläre Fünfeck, dessen Seiten zu den Diagonalen im goldenen Schnitt stehen.

In Lektion 4 des XIII. Buches aber bringt Euklid nicht die 5, sondern die 3 in Zusammenhang mit dem Goldenen Schnitt: "Teilt man eine Strecke stetig, so wird die Summe der Quadrate über der ganzen Strecke und ihrem kleineren Abschnitt 3 mal so gross, wie das Quadrat über dem grösseren Abschnitt".

Geometrisch umgesetzt läuft dies auf Figur 2 heraus (vgl. Figur 2).

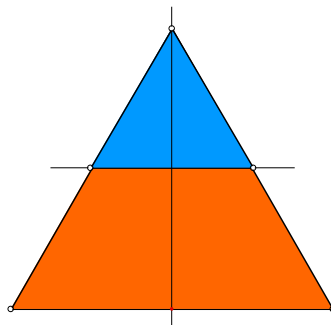
Figur 2



Setzt man für  $AS = 1$ , so ist  $AB = \tau (1.61803399\dots)$  und  $BC = (\tau - 1) (0.61803399\dots)$ . Allgemein gilt also:  $(AC)^2 = 3(AS)^2$ , was exakt der Lektion Euklid's entspricht.

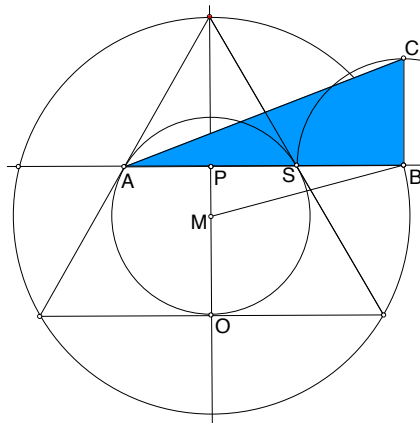
Die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten  $\tau$  und  $(\tau-1)$  ist gleich  $\sqrt{3}$ . Letztere ist aber bekanntlich die Proportion der Höhe eines gleichseitigen Dreiecks zu seiner halben Seite. Der Verdacht, dass ausser dem Doppelquadrat und dem regulären Fünfeck auch das gleichseitige Dreieck etwas mit dem goldenen Schnitt zu tun hat, liegt nahe. Um der Sache auf die Spur zu kommen, zeichne man ein gleichseitiges Dreieck mit einer seiner Höhen. Nun ziehe man senkrecht zur Höhe und in der Hälfte derselben eine Gerade. Diese ist parallel zur Grundseite und kann deshalb auch als Mittelparallele bezeichnet werden. Nimmt man die Grundseite mit 2 an, so entsteht durch die Mittelparallele oben eine gleichseitige Dreieck mit den Seiten 1 (vgl. Figur 3).

Figur 3



In Figur 2 war die 1 die Mittlere Proportionale  $AS$ , somit kann man das Dreieck aus Figur 2 leicht in Figur 3 einzeichnen, wobei  $AS$  aus Figur 2 deckungsgleich mit der 1 in Figur 3 zu liegen kommt (vgl. Figur 4).

Figur 4



Berechnet man den Kreisradius  $MB$  und danach pythagoreisch  $PB$ , so wird man mit einiger Ueberraschung feststellen, dass  $B$  auf dem Umkreis des gleichseitigen Dreiecks liegt. Zudem ist aber  $SB$  der Minor und  $AS$  der Maior der Gesamtstrecke  $AB$ . Daraus kann man den folgenden Satz ableiten: *Die Mittelparallele eines gleichseitigen Dreiecks wird von den Dreiecksseiten und dem Umkreis im Goldenen Schnitt geschnitten.*

Einige Autoren vermuten, dass die Lektionen 1 - 5 des XIII. Buches auf eine Schrift des Eudoxos zurückgehen. Damit könnte Eudoxos<sup>2</sup>, einmal abgesehen von den Pythagoreern einer der "Erfinder" des Goldenen Schnitts gewesen sein oder zumindest einer derjenigen, welche alte, verborgene Weisheiten ans Tageslicht beförderten und mathematisch bearbeiteten. Die Lektionen 1 - 3 des XIII. Buches behandeln den Goldenen Schnitt auf die "übliche" Weise über das Doppelquadrat und der mit ihm verbundenen  $\sqrt{5}$ . Lektion 4 aber unterscheidet sich grundsätzlich von allem bisher über den Goldenen Schnitt gesehenen durch das Auftreten der  $\sqrt{3}$ , resp. der 3. In vielen Büchern der Proportionslehre wird im Zusammenhang mit  $\tau$  und  $\tau^{-1}$  die Gleichung  $\tau^2 + \tau^{-1} = 3$  vorgestellt, ohne aber eine plausible Erklärung dafür aufzuführen. Zweifellos ist aber diese Formel eine Ableitung der Lektion 4 des XIII. Buches, welche sich etwas umgestellt auch so darstellen lässt:

$a^2 + (a - x)^2 = 3x^2$ , wobei a die ganze Strecke, x der grössere Abschnitt und (a-x) der kleinere Abschnitt einer im Goldenen Schnitt geteilten Strecke bedeutet.

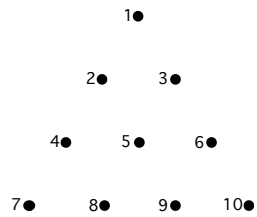
In Euklid's Elementen wird der von Proklos sogenannte "Schnitt" dreimal behandelt. Zuerst in Buch II (Lektion 11) in Rahmen der pythagoreischen geometrischen Algebra. Dann in Buch VI (Lektion 30) in einer etwas "am Schwanz aufgezümmten" Art, welche auf Eudoxos zurück geführt wird und schliesslich, wie besprochen in Buch XIII (Lektionen 1-6), welches ebenfalls wenigstens ursprünglich von Eudoxos stammen mag, aber höchswahrscheinlich von Theaitetos weiterbearbeitet wurde. Ganz deutlich unterscheidet sich nun Lektion 4 des XIII. Buches von allen andern, indem hier der goldene Schnitt im Zusammenhang mit den gleichseitigen Dreieck auftritt. Der Hinweis allerdings auf einen solchen Zusammenhang fehlt sowohl bei Euklid, als auch bei allen andern antiken Schriftstellern. Die eigenartige, aber im erklärten Sinn auch einzigartige Lektion 4 lässt die Vermutung zu, dass sie ein Ueberbleibsel einer verloren gegangenen Definition des Goldenen Schnitts sein könnte.

Das gleichseitige Dreieck ist nebst dem Kreis bestimmt eine der ältesten, wenn nicht die älteste geometrische Figur überhaupt. Die Sumer z.B. haben den geometrischen Mechanismus lückenlos aneinandergfügter Kreise erkannt. In Ur (Warka) haben sie bereits um 4000 v. Chr. präzis geformte und gebrannte Tonzyylinder von ca 2.5 cm Durchmesser lückenlos in den noch weichen Lehm der Mauerwerke eingedrückt und mittels Verwendung verschiedenfarbiger Tonzyylinder Muster von gleichseitigen Dreiecken erzeugt. Im Berliner Pergamonmuseum sind Teile dieser Mauerwerke rekonstruiert. Auch das Hexagramm, der Davidsstern der Juden ist eine uralte Form und er spielte bei vielen Völkern Kleinasiens eine tragende Rolle. Die Pythagoreer verwendeten das gleichseitige Dreieck zur bildlichen Darstellung der kleinen exoterischen Tetraktys  $1 + 2 + 3 + 4$  (vgl. Figur 5).

---

<sup>2</sup> Eudoxos von Knidos, grch. Mathematiker, \*ca. 400 v.Chr., +ca.347 v.Chr.

Figur 5

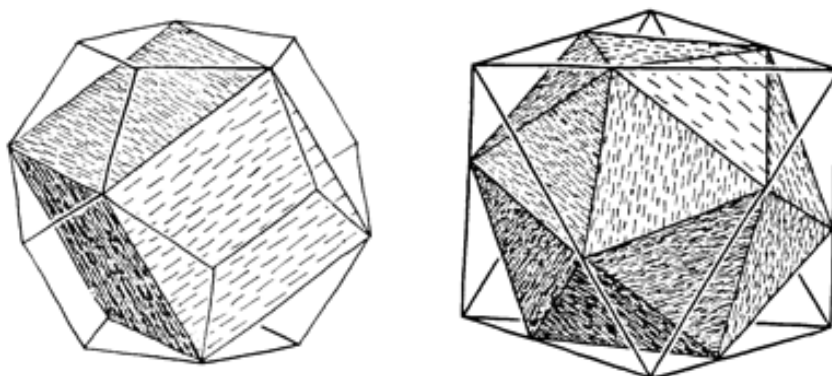


Doch hat man je etwas davon gehört, dass aus dem gleichseitigen Dreieck oder aus dem Hexagramm der Goldene Schnitt konstruiert worden sei?

2000 Jahre zu spät hat Geirge Odom 1982 eben dasjenige entdeckt, was in Figur 4 dargestellt und aufgrund der Lektion Euklid's bewiesen worden ist. *Die Mittelparallele eines gleichseitigen Dreiecks wird von den Seiten und dem Umkreis im Goldenen Schnitt geschnitten.* Odom ist ein Künstler, über welchen keine Daten bekannt sind, ausser der Vermutung, dass er heute noch irgendwo in den USA lebt und dass er engen und langjährigen Kontakt zu H.S.M. Coxeter<sup>3</sup> pflegte. Dieser befasste sich, wie zuvor schon J. Kepler, M. Brückner, T. Weeler und andere mit den Sternformen der regulären Polieder. Im englischen Sprachgebrauch wird für diese Verwandlung der Polieder das schöne Wort "Stellation" verwendet, was in Deutsch höchstens unelegant als "Sternung" bezeichnet werden könnte. Im Jahr 1938 hat H.S.M. Coxeter zusammen mit P. du Val, H.T. Flather und J.F. Petrie in der Publikation "The Fifty Nine Icosahedra" [CHSMa] die vollständige "Stellation" des Icosaeders herausgegeben. Auf Seite 4 stellt er fest:

*"Just as a tetrahedron can be inscribed in a cube, so a cube can be inscribed in a dodecahedron. By reciprocation, this leads to an octahedron circumscribed an icosahedron. In fact, each of the twelve vertices of the icosahedron divides an edge of the octahedron according to the "golden section".*

Figur 6

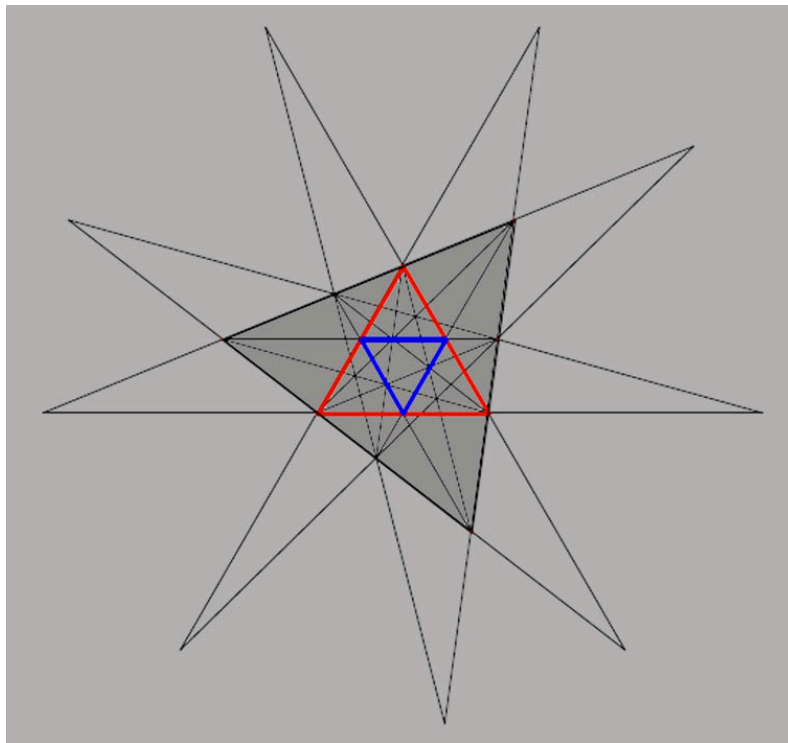


<sup>3</sup> Coxeter, Harold Scott MacDonald, engl.-kanadischer Mathematiker, +1907 London, +2033 Toronto

Sowie ein Hexaeder einem Dodekaeder eingeschrieben werden kann, kann in einer gewissen Hinsicht reziproken Weise dem Oktaeder ein Ikosaeder eingeschrieben werden. Und hier tritt nun das Entscheidende auf: *Die Ecken des, einem Oktaeder eingeschriebenen Ikosaeders schneiden dessen Kanten im Goldenen Schnitt* (vgl. Figur 6).

Es ist sehr schwierig festzustellen, ob diese erstaunliche Tatsache von H.S.M. Coxeter entdeckt wurde oder ob sie schon früher bekannt war. M. Brückner erwähnt jedenfalls in seinem heute noch aktuellen Werk "Vielecke und Vielflache" nichts davon, obwohl die Figur 17 auf Tafel II dieses Werkes [BM] nur so vor Goldenen Schnitten strotzt (vgl. Figur 7). Diese Figur, welche auch H.S.M. Coxeter bringt, ist die Projektion einer Ikosaederfläche bis zur vollständigen "Stellation". In diesem letzten Zustand des Ikosaeders entsteht ein seeigelartiger Körper, dessen Herstellung nur mit grössten Schwierigkeiten möglich und er deshalb nur in ein paar wenigen Exemplaren vorhanden ist (z.B. am Departement of mathematical statistics der University of Cambridge).

Figur 7

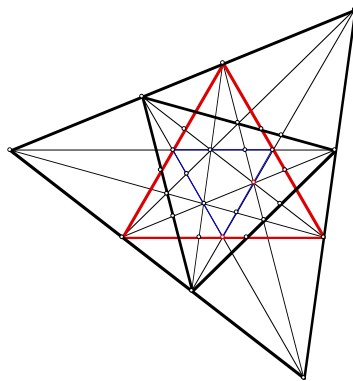


Man muss H.S.M. Coxeter zu gute halten, dass er mit Künstlern Kontakt pflegte und sich auch für deren Interpretationen der Geometrie interessierte. Diese tolerante Haltung, welche übrigens bereits an der platonischen Akademie in Alexandria gepflegt wurde, mag dazu geführt haben, dass der Künstler G. Odom in der Projektion der "Stellation" den wichtigen Zusammenhang des gleichseitigen Dreiecks mit dem Goldenen Schnitt erkannte. Jedenfalls soll Figur 6.2D im Buch "Regular Polytopes" von H.S.M. Coxeter [CHSMb], laut einem

Schreiben desselben von G. Odom stammen. Diese Figur ist nichts anderes als das Herzstück der Projektion (vgl. Figur 7), wobei allerdings die massgebenden Teile zur Erkennung des verborgenen goldenen Schnitts stark ausgezogen sind (vgl. Figur 8).

A. Beutelspacher [BA] erwähnt in seinem lesenswerten Buch über den Goldenen Schnitt dieses Phänomen zum ersten mal in deutscher Sprache im Jahr 1988, woraus man schliessen könnte, dass der verschwundene Schatz mit einem Umweg über Amerika nach über 2000 Jahren auf jenen Kontinent gelangte, wo er wahrscheinlich schon längst hätte erkannt werden sollen.

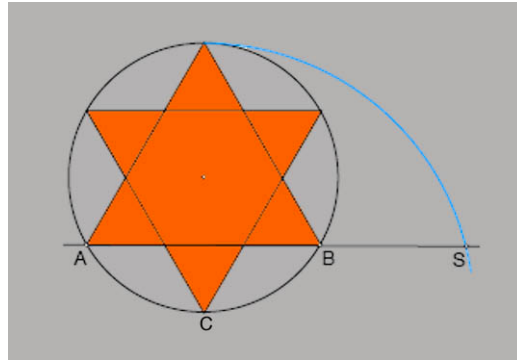
Figur 8



Wie der aufmerksame Leser bestimmt bemerkt hat, stimmen die Daten der Literatur bezüglich der Entdeckung des goldenen Schnitts aus dem gleichseitigen Dreieck nicht überein. Aber ob nun 1938, 1963, 1982 oder 1988 macht keinen wesentlichen Unterschied, wenn man bedenkt, dass seit Euklid's Lektion 4 im XIII. Buch weit über 2000 Jahre vergangen sind. Es ist aber durchaus möglich, dass irgendwann im omajadischen Spanien, in der Renaissance oder in der neueren Zeit irgendwer dieses Geheimniss bereits gelüftet hat. Autoren wie F. Klein, L. Schläfli und andere, welche sich eingehend mit dem Ikosaeder befasst haben, sind kaum bekannt und können nur von Fachleuten gelesen werden. Doch gerade manche Fachleute stehen dem Goldenen Schnitt eher gleichgültig, wenn nicht gar feindschaftlich gegenüber und so wäre es durchaus denkbar, dass der nun wiedergefundene Schatz nicht gesehen wurde, obwohl er zu Tage gefördert war.

Eine der eindrucklichsten Konsequenzen des wieder gefundenen Schatzes ist die Verlängerung einer Strecke im goldenen Schnitt mittels dem Hexagramm. Der Schenkel  $AB$  des Hexagramms soll im Goldenen Schnitt verlängert werden. Dazu sticht man den Zirkel in der zwischen den Ecken  $A$  und  $B$  liegenden Ecke  $C$  ein und schlägt den ganzen Durchmesser des Umkreis auf die Verlängerung von  $AB$ .  $S$  ist der gesuchte Punkt (vgl. Figur 9).

Figur 9



Diese Konstruktion besticht durch ihre Einfachheit und ihre fast mystische Ausstrahlung; ausserdem dürfte sie von mathematikhistorischer Bedeutung sein, denn sie vermag die Erkennung der stetigen Teilung in eine Zeit zu versetzen, in welcher die Historiker den Menschen zumeist nur das Abzählen der Finger zumuten. Dazu kommt noch, dass das Hexaeder von der Herkunft her just in jene Gegenden Kleinasiens passt, wo schon vor über 10'000 Jahren die vermutlich ersten Hochkulturen entstanden sind. Die sensationellen Ausgrabungen von Jericho, Catal Hüyük und erst in neuester Zeit in der Nähe des fragwürdigen Atatürk-Staudamms haben den Beginn des grossflächigen Städtebaus und in dessen Kielwasser, die Planung auf geometrischer Basis in Zeiten zurück versetzt, welche für die Mathematikgeschichte völlig tabu sind. Die genannten Ausgrabungen wurden praktisch nur in Fachkreisen wahrgenommen, ganz im Gegensatz zum Fund des bronzzeitlichen Jägers im Herbst 1991 in den Tiroler Bergen. Dieser Fund hat den Weg in die Massenmedien gefunden und aller Welt deutlich gemacht, mit welcher guter und elegant hergestellter Ausrüstung die Menschen jener Zeit sich auszustatten pflegten. Dabei handelt es sich bei dem "Tiroler" bestimmt nicht um einen Angehörigen einer Hochkultur, und man sollte deshalb versuchen, die Lebensumstände in einer gleichzeitigen Hochkultur in Mesopotamien auf der Basis des Tiroler Fundes zu interpolieren. Aber allein schon der "Oetzi", wie er von der Presse liebevoll genannt wird, zeigt, dass die Vorfahren meist unterschätzt werden, obwohl diese schon vor 20'000 Jahren in den Höhlen und Abris Frankreichs und Spaniens Werke geschaffen haben, welche es heute noch mit jedem Kunstwerk aufnehmen.

Bei Bagdad hat F. Wilhelm 1938 ein Tongefäss mit eigenartigem metallischem Inhalt gefunden, welches später als eine veritable "Leidener Flasche" erkannt wurde. Eine Batterie also, welche einen Gleichstrom erzeugen konnte. F.M.Gray hat 1957 mit einem Nachbau des Fundes dessen Funktionstüchtigkeit bewiesen und damit tatsächlich eine Birne zu Brennen gebracht.

Als vor über hundert Jahren der spanische Grossgrundbesitzer Don Marcellino bei Santilliana de mar die Malereien in der nunmehr weltberühmten Höhle von Altamira entdeckte, wurde er wegen seiner Vorstellung, die Malereien seien an die 20000 Jahre alt, von aller Welt ausgelacht und der Fälschung bezichtigt. Erst später, als man ähnliche Höhlen in Frankreich gefunden hatte, wurde Don Marcellino rehabilitiert. Die Malereien von



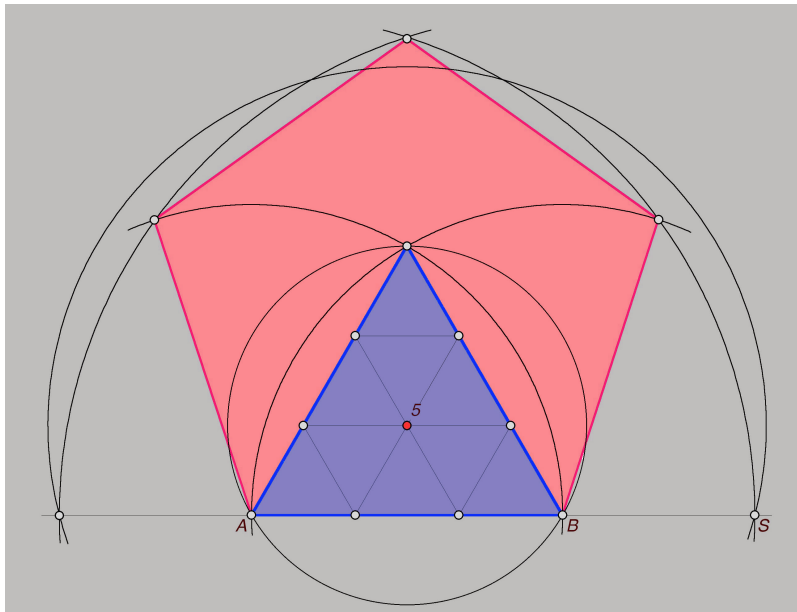
Altamira wurden wissenschaftlich bestätigt und gehören heute zu den erstaunlichsten und schönsten Beispielen menschlichen Kulturschaffens. Doch die geistigen Hintergründe solchen Schaffens werden trotz aller Bewunderung kaum berührt, ausser der schnöden Bemerkung, dass es sich um kultische Tierdarstellungen handle, welche das Jagdglück herbeischwören sollten. Wer aber diese Tierdarstellungen auf sich einwirken lässt, wird daran zu zweifeln beginnen, dass der Künstler je ein solches Tier getötet haben könnte.

Solche Beispiele von den Cromagnon-Menschen bis zum "Oetzi" zeigen, dass die heutige, meist zu sehr rationalistische Denkweise dazu führen kann, die Vorfahren zu unterschätzen, indem man ihre Handlungsweise nur auf rationale Beweggründe zurückführt. Man sollte in diesen Dingen manchmal auch die "Spekulanten" beachten, welche frei von jeglichem wissenschaftlichen Codex der Fantasie freien Lauf lassen; allerdings oftmals mit dem Resultat, dass diese überbietet und damit die Rechthaberei der Rationalisten eher noch begünstigt. So kommt es dann dazu, dass die Erbauer der ägyptischen Pyramiden des Zufalls bezichtigt werden, die leibliche Existenz des Pythagoras und auch des Theaitetos angezweifelt, und Euklid in akribischer Weise auf Fehler untersucht wird. Dabei war es doch Euklid, welcher das ungeheure mathematische Wissen der frühen Antertums sammelte, definierte und bewies. Wenn ihm dabei manchmal tatsächlich ein Fehler in Schönheit und Logik unterlief, was soll's? Einen Vorwurf könnte man ihm höchstens machen, dass er das Geheimnis des Zusammenhangs des gleichseitigen Dreiecks mit dem goldenen Schnitt nicht preisgab, oder es nicht konnte, weil er es nicht wusste. Zumindest gehäht haben aber musste er etwas, sonst hätte er diese Lektion, welche sich von allen andern den Goldenen Schnitt behandelnden unterscheidet, nicht in sein Lehrbuch genommen.

Der Schatz des Goldenen Schnitts aus dem gleichseitigen Dreieck, welcher hier als "wiedergefunden" bezeichnet wird, hat aber auch noch eine andere historische Bedeutung als diejenige, welche in Figur 9 gezeigt wurde. Es besteht kein Zweifel daran, dass die Pythagoreer ihre kleine exoterische Tetraktys (vgl. Figur 5) geometrisch exakt zu konstruieren vermochten. Hatten sie aber dies geschafft, so musste es ihnen leichtfallen, daraus das reguläre Fünfeck und folglich auch ihr Erkennungszeichen, das Pentagramm abzuleiten. Mit dem Tetraktyspunkt im Schwerpunkt des gleichseitigen Dreiecks, dem Punkt der Zahl 5, ergab sich just jener Punkt, von dem aus sie den goldenen Schnitt der Basis des Dreiecks konstruieren konnten. Schlagen sie nämlich um diesen Punkt einen Kreis mit dem doppelten Radius des Umkreises, so erhielten sie auf der Verlängerung der Basis den Punkt S, welcher nichts anderes ist, als die Ergänzung der Strecke AB im Goldenen Schnitt. Nun stand der geometrisch unanfechtbaren Konstruktion des Pentagramms nichts mehr im Weg, denn die weiteren Schritte sind nur das Ziehen der nötigen Kreise, deren Radien durch die Tetraktys und ihrem verdoppelten Umkreis bereits definiert sind (vgl. Figur 10).

Spätestens hier nun könnte man von einer eigentlichen Metamorphose vom gleichseitigen Dreieck zum regulären Fünfeck im geometrischen Sinn sprechen. Die Metamorphose vom Hexagramm zum Pentagramm, wie R. Steiner sie verschiedentlich erwähnt, findet damit eine bescheidene exoterisch-geometrische Erklärung.

Figur 10



Der Grundstein dieser Erklärung wurde vor über 2000 Jahren in Lektion 4 des XIII. Buches von Euklid gelegt. Wie schon erwähnt, stammen die Inhalte dieses Buches mehrheitlich von Eudoxos, welcher nach Proklos, zusammen mit Platon längere Zeit in Aegypten weilte. Auch Pythagoras, welchem selbst, oder dessen Schüler die "Erfindung" des Pentagramms zugeschrieben wird, weilte lange Zeit in Aegypten. Nach verschiedenen Quellen soll er dort eine hohe Art der Einweihung erlangt haben. Der Spekulation sind wieder einmal alle Türen geöffnet und diesmal mit vollem Recht. Warum hat der Erbauer der Cheopspyramide, der Priester und Baumeister Hem On, den Rücksprung der Seitenschräge mit 5.5 zu 7 Ellen gewählt? L. Borchardt [BL] macht ihm den Vorwurf, dass er sich mit dieser Proportion das Rechnen leicht gemacht hätte, eine Aussage, welche nur schwer zu verstehen ist. Wie haben denn die Baumeister der alten griechischen Tempel, welche zum Teil schon zu Thales und Pythagoras Zeiten standen, die Goldenen Schnitte gefunden, welche diese Bauwerke in sehr guten Annäherungen aufweisen? Gar nicht zu reden von zahlreichen Steinkreisen der Megalithiker in England und Irland, deren von A. Thom vollzogenen Konstruktionsgrundlagen geradezu Manifeste des goldenen Schnitts darstellen, ohne dass die Wissenschaft dies je bemerkt hätte (vgl. der "Schnitt" im Stein).

Die Möglichkeit, dass selbst unzivilisierte "Barbaren" einen Kreis um einen Pflock und demnach ein gleichseitiges Dreieck in den Boden zu kratzen vermochten, wird auch von den Historikern kaum mehr bezweifelt. Wenn nun aber aus diesen Urfiguren der Goldene Schnitt ohne besondere Ansprüche vollzogen werden kann, so könnte doch das Auftreten der auffallend zahlreichen und guten Annäherungen in präpythagoreischer Zeit eine bessere Erklärung finden als nur Zufall. Allerdings sollte nicht übersehen werden, dass gewisse sogenannte harmonikale Proportionen gute Annäherungen an den Goldenen Schnitt ergeben. Harmonikal werden Zahlenverhältnisse genannt, welche stets ganzzahlig sind und welche im Zusammenhang mit Saitenlängen (z.B. am Monochord) und Frequenzen einer schwingenden Saite die zentrale Rolle spielen. So sind z.B. die Proportio-

nen  $3 : 5$  und  $5 : 8$  der kleinen, resp. grossen Sext entsprechend und gleichzeitig mit dem Quotienten  $0.6$  und  $0.625$  schon ganz in der Nähe des Goldenen Schnitts. Dies hat damit zu tun, dass die Paare  $3/5$  und  $5/8$  Glieder der sogenannten Fibonacci-Folge sind, deren Glieder jeweils die Summe der beiden vorangehenden sind.

*1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ... usw*

Bekanntlich nähert sich der Quotient zweier benachbarter Fibonaccizahlen der Zahl  $\rho$  ( $0.618034\dots$ ) resp.  $\tau$  ( $1.618034\dots$ ) je höher man in der Reihe hinaufklettert. Da sich die Harmonik im Zusammenhang mit der Musiklehre mit den relativ kleinen ganzen Zahlen befasst und die 5 und die 8 sowohl der Harmonik, als auch der Fibonaccifolge angehören, kann infolge der an Bauten unvermeidlichen Ungenauigkeiten, niemals explizit entschieden werden, welche Konstruktionsgrundlage wirklich verwendet worden ist. Noch transparenter wird dieses Problem beim Profildreieck der Cheopspyramide. Multipliziert man nämlich das Fibonacci-Paar  $55/89$  mit 4, so erhält man  $220/356$ . Die von Borchardt festgelegte Proportion für die Cheopspyramide  $5.5 : 7$  ergibt auch  $220 : 280$ . Rechnet man daraus die Hypotenuse aus, so ergibt sich  $356.0899\dots$ , ein erstaunlicher Zufall? Das Fibonacci-Paar  $55/89$  ist durch seinen Quotienten  $0.6179775\dots$  eine schon ganz gute Annäherung an den Goldenen Schnitt. Angesicht einer solchen "Abweichung" von sage und schreibe nur 5.6 Hunderttausendstel muss doch das Zufallsargument als höchst unbescheiden bezeichnet werden.

Viel bescheidener ist da H.S.M.Coxeter, welcher in der Wiederentdeckung des verlorenen Schatzes eine wichtige Rolle spielt, ohne aber auch nur für einen der verblüffenden Zusammenhänge von gleichseitigem Dreieck und Goldenem Schnitt die Autorenschaft zu beanspruchen. Er behandelt diese Dinge, als ob deren Kenntnis schon immer vorhanden gewesen wäre. Unklar bleibt auch der Entdecker der Tatsache, dass die Ecken des einem Oktaeder eingeschriebenen Ikosaeders dessen Kanten im goldenen Schnitt teilen. Hiefür könnte Fra Luca Pacioli [PFL] in Frage kommen, denn in seiner "13. Eigenschaft" spricht er vom "*20-Flächen*" und vom "*Kubus*" in derselben Umkugel, wobei allerdings das vorgenannte Postulat in der verwirrenden Begeisterung des Kirchenmannes nicht klar zu Tage tritt.

Wenn man sich vorstellt, was für ein ungeheures Wissen in den ägyptischen und mesopotamischen Tempeln, in den griechischen und hellenistischen Akademien, in den Schulen der arabischen Gelehrten und nicht zuletzt in der sagenhaften Akademie zu Gondischapur, jenem Zufluchtsort der letzten Platoniker Athens und frühreifen Stätte des Materialismus, vorhanden gewesen sein muss, so kann man doch nicht ernsthaft annehmen, dass der einfachste aller Goldenen Schnitte, der aus dem gleichseitigen Dreieck, nicht bekannt gewesen sei. Das gleichseitige Dreieck und ein Kreis mit dem doppelten Radius des Umkreises, das war's dann schon.... Eher müsste man von einem Zufall reden, wenn die Alten nicht auf diese einfache Konstruktion gestossen wären. Doch vielfach liegt die Schwierigkeit gerade in der Einfachheit und deshalb hat es vermutlich so lange gedauert, bis dieser Schatz aus ferner Vergangenheit wieder gefunden wurde.

Alfred Hoehn

## Literaturhinweise

- [BA] Beutelspacher A., „Der Goldene Schnitt“, BI-Wiss.-Verlag, Mannheim, 1988, S.22 f
- [BL] Borchardt L., „Gegen die Zahlenmystik an der grossen Pyramide bei Giseh“, Berlin, 1922, S.16
- [BM] Brückner M., „Vielecke ond Vielflache“, Teubner, Leipzig, 1900
- [CHSMa] Coxeter H .S.M., Du Val. P., Flather H.T., Petrie J.F., „The Fifty-Nine Icosahedra“, Springer-Verlag, New York Heidelberg Berlin, 1982
- [CHSMb] Coxeter H.S.M. „Regular Polytopes“, Dover Publications Inc, New York 1973, S.97
- [PFL] Pacioli F.L., „Divina Proportione“, Verlag C. Graeser, Wien, 1889,